View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by Hal-Diderot

Dérivation des surfaces convexes de R3 dans l'espace de Lorentz et étude de leurs focales

Yves Martinez-Maure

To cite this version:

Yves Martinez-Maure. Dérivation des surfaces convexes de R3 dans l'espace de Lorentz et étude de leurs focales. 2009. <hal-00432273v3>

HAL Id: hal-00432273

https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00432273v3

Submitted on 13 May 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DÉRIVATION DES SURFACES CONVEXES DE $\mathbb{R}^3$ DANS L'ESPACE DE LORENTZ ET ÉTUDE DE LEURS FOCALES

YVES MARTINEZ-MAURE

Dedicated to the memory of Heliodoro Martinez.

Abstract. Introducing an appropriate notion of derivative of closed convex surfaces of $\mathbb{R}^3$ in the Lorentz-Minkowski space $\mathbb{R}^{3,1}$, we give a natutal three-dimensional equivalent of an upper bound of the isoperimetric deficit in terms of the signed area of the evolute of a closed convex curve of $\mathbb{R}^2$. Furthermore we etablish a series of geometric inequalities for focals of closed convex surfaces.

1. Introduction et majoration du déficit isopérimétrique dans $\mathbb{R}^3$

Soit $\mathcal{K}$ un corps convexe de classe C_+^4 [5] dans le plan vectoriel euclidien $\mathbb{R}^2$. Paramétré par son vecteur normal sortant, le bord de $\mathcal{K}$ est un hérisson $\mathcal{H}_h$ de fonction de support définie sur le cercle unité $\mathbb{S}^1$ par : $\forall u(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{S}^1$, $h(\theta) = \max_{x\in\mathcal{K}} \langle x, u(\theta)\rangle$, où $\langle .,. \rangle$ est le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^2$. La développée (resp. la développée seconde) de $\mathcal{H}_h$ est encore un hérisson $\mathcal{H}_{\partial h}$ (resp. $\mathcal{H}_{\partial^2 h}$) de fonction de support $(\partial h)(\theta) = h'\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ (resp. $\left(\partial^2 h\right)(\theta) = -h''(\theta)$). L'aire $a(h)$ et la longueur $l(h)$ de $\mathcal{H}_h$, l'aire $a(\partial h)$ de sa développée $\mathcal{H}_{\partial h}$ et l'aire mixte $a\left(h, \partial^2 h\right)$ de $\mathcal{H}_h$ et de sa développée seconde $\mathcal{H}_{\partial^2 h}$ vérifient [3, Prop. 6] :

$$0 \leq l(h)^2 - 4\pi a(h) \leq -4\pi a(\partial h) = -4\pi a\left(h, \partial^2 h\right). \tag{1}$$

La première inégalité est l'inégalité isopérimétrique. La seconde majore le déficit $l(h)^2 - 4\pi a(h)$ à l'aide des “courbes dérivées” $\mathcal{H}_{\partial h}$ et $\mathcal{H}_{\partial^2 h}$ de $\mathcal{H}_h$. Dans cette Note, nous prouvons que (1) admet un équivalent naturel en dimension 3.

Soit $\mathcal{K}$ un corps convexe de classe C_+^4 dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$. Paramétré par son vecteur normal sortant, le bord de $\mathcal{K}$ est un hérisson $\mathcal{H}_h$ de fonction de support définie sur la sphère unité $\mathbb{S}^2$ par : $\forall u \in \mathbb{S}^2$, $h(u) = \max_{x\in\mathcal{K}} \langle x, u\rangle$, où $\langle .,. \rangle$ est le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^3$. La développée moyenne de $\mathcal{H}_h$ est l'enveloppe des plans médiateurs des segments focaux $\sigma_h(u) := \left[c_h^1(u), c_h^2(u)\right]$, où $c_h^1(u)$, $c_h^2(u)$ sont les centres de courbure principaux de $\mathcal{H}_h$ au point de vecteur normal sortant u. Elle est, plus précisément, le hérisson de fonction de support $\left(\partial^2 h\right)(u) = -\frac{1}{2}(\Delta h)(u)$, où $(\Delta h)(u)$ est la somme des valeurs propres du hessien sphérique de h en u. L'intégrale de la courbure moyenne $m(h)$ et l'aire $s(h)$ de $\mathcal{H}_h$, et l'aire mixte $s\left(h, \partial^2 h\right)$ de $\mathcal{H}_h$ et de sa développée moyenne $\mathcal{H}_{\partial^2 h}$ (définie en polarisant la forme quadratique $h \longmapsto s(h)$ sur $C^4\left(\mathbb{S}^2; \mathbb{R}\right)$) sont données par [3] :

$$m(h) = \int_{\mathbb{S}^2} h d\sigma,\ s(h) = \int_{\mathbb{S}^2} R_h d\sigma = \int_{\mathbb{S}^2} h R_{(1,h)} d\sigma \text{ et } s\left(h, \partial^2 h\right) = \int_{\mathbb{S}^2} \left(\partial^2 h\right) R_{(1,h)} d\sigma$$

Key words and phrases. Evolute, focal surface, hedgehog, isoperimetric deficit, Lorentz space. MSC (2010): 52A38, 52A15, 52A40, 51B15.

où σ est la mesure de Lebesgue sphérique et R_h (resp. $R_{(1,h)}\big)$ le produit $R_1 R_2$ (resp. la moyenne $\frac{1}{2}(R_1+R_2)\big)$ des rayons de courbure principaux R_1, R_2 de $\mathcal{H}_h$, c'est-à-dire la fonction de courbure (resp. le rayon de courbure moyen) de $\mathcal{H}_h$. Pour tout $u \in \mathbb{S}^2$, l'application tangente à la réciproque x_h de l'application de Gauss de $\mathcal{H}_h$ est donnée en u par $T_u x_h = h(u)\, Id_{T_u\mathbb{S}^2} + H_h(u)$, où $H_h(u)$ est l'endomorphisme symétrique associé au hessien de h en u [1]. Par conséquent, $R_{(1,h)} = h + \frac{1}{2}\Delta h$.

`Théorème 1.` *Soit $\mathcal{K}$ un corps convexe de classe C^4_+ de $\mathbb{R}^3$ et soit $h \in C^4\big(\mathbb{S}^2;\mathbb{R}\big)$ sa fonction de support. L'intégrale de la courbure moyenne $m(h)$ du hérisson $\mathcal{H}_h$, son aire $s(h)$ et l'aire mixte $s\left(h,\partial^2 h\right)$ de $\mathcal{H}_h$ et de sa développée moyenne $\mathcal{H}_{\partial^2 h}$ vérifient :*

$$0 \le m(h)^2 - 4\pi s(h) \le -4\pi s\big(h,\partial^2 h\big). \tag{2}$$

L'encadrement (2) est vérifié pour tout hérisson $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^3$, où $h \in C^4\left(\mathbb{S}^2;\mathbb{R}\right)$. Si $\mathcal{H}_h$ est non convexe, son aire $s(h)$ s'écrit $s_+(h) - s_-(h)$, où $s_+(h)$ (resp. $s_-(h)$) est l'aire totale de ses régions elliptiques (resp. hyperboliques). Le lecteur pourra consulter [1] pour une introduction aux hérissons et [4] pour un panorama récent.

`Preuve.` La première inégalité est bien connue pour $\mathcal{H}_h$ convexe (e.g. [5, p. 322]). Le cas général est traité dans [3]. Par ailleurs, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$m(h)^2 - 4\pi s(h) = \left(\int_{\mathbb{S}^2} R_{(1,h)} d\sigma\right)^2 - 4\pi s(h) \le 4\pi \int_{\mathbb{S}^2} \left(R^2_{(1,h)} - R_h\right) d\sigma.$$

Or, on a $\int_{\mathbb{S}^2} R_h d\sigma = \int_{\mathbb{S}^2} h R_{(1,h)} d\sigma$ par symétrie du volume mixte [3]. Comme $R_{(1,h)} = h + \frac{1}{2}\Delta h$, on en déduit que : $\int_{\mathbb{S}^2}\left(R^2_{(1,h)} - R_h\right) d\sigma = -s\big(h,\partial^2 h\big)$. □

La comparaison des encadrements (1) et (2) suggère l'existence d'une "surface dérivée" $\mathcal{H}_{\partial h}$ dont l'aire $s(\partial h)$ devrait vérifier :

$$0 \le m(h)^2 - 4\pi s(h) \le -4\pi s(\partial h) = -4\pi s\big(h,\partial^2 h\big)\,.$$

Une telle notion de surface dérivée ne peut être définie dans $\mathbb{R}^3$ et c'est sans aucun doute ce qui explique que son existence soit passée inaperçue jusqu'à ce jour. Cette surface $\mathcal{H}_{\partial h}$ est en effet à chercher dans l'espace de Lorentz-Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$. C'est en effet ce que nous suggère le fait que l'intégrale

$$-s\big(h,\partial^2 h\big) := \int_{\mathbb{S}^2}\left(R^2_{(1,h)} - R_h\right) d\sigma = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{S}^2} (R_1 - R_2)^2\, d\sigma$$

soit l'aire de Laguerre du hérisson $\mathcal{H}_h$ paramétré par la réciproque $x_h : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3$, $u \longmapsto \nabla h(u) + h(u)\,u$ de son application de Gauss (e.g. [2, 6]) :

$$L\left(x_h\right) := \int_{\mathbb{S}^2} \frac{H^2 - K}{K}\frac{d\sigma}{K} = \int_{\mathbb{S}^2}\left(R^2_{(1,h)} - R_h\right) d\sigma,$$

où H (resp. K) est la courbure moyenne (resp. de Gauss) de $\mathcal{H}_h$. Autrement dit, $-s\big(h,\partial^2 h\big)$ est égale à l'aire de la surface décrite dans l'espace $\Sigma \approx \mathbb{R}^{3,1}$ des sphères orientées et sphères-points de $\mathbb{R}^3$ par la sphère moyenne $S\left(\frac{1}{2}\left(c^1_h + c^2_h\right)(u); R_{(1,h)}(u)\right)$, orientée par u en $x_h(u)$, lorsque u décrit $\mathbb{S}^2$. Nous verrons que cette surface peut s'interpréter comme une surface dérivée $\mathcal{H}_{\partial h}$ de fonction de support $\partial h = (dh)/\sqrt{2}$

et donc $\sqrt{2}\,\partial$ comme l'opérateur de Dirac-Hodge $D = d + \delta$, où δ est la codifférentiation extérieure, de sorte que l'on a bien $\partial^2 h = \frac{1}{2}\delta\,(dh) = -\frac{1}{2}\Delta h(u)$. En passant, cela permet d'interpréter l'aire de Laguerre $L\,(x_h)$ comme l'aire mixte $s\big(h, \partial^2 h\big)$.

2. Développement des hérissons de $\mathbb{R}^3$ dans l'espace de Lorentz $\mathbb{R}^{3,1}$

Reprenons les notations précédentes. Posons $\mathbb{R}^{3,1} = \Big(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \langle ., . \rangle_{3,1}\Big)$, où $\langle ., . \rangle_{3,1}$ est la métrique de Lorentz : $\langle (x;t)\,, (x';t') \rangle_{3,1} = \langle x, x' \rangle - t\,t'$. Pour tout $(x;r) \in \mathbb{R}^{3,1}$, $(x;r)$ sera vu comme la sphère $S(x;|r|)$ de $\mathbb{R}^3$ orientée par le vecteur normal sortant (resp. rentrant) si $r>0$ (resp. $r<0$), et comme la sphère-point $\{x\}$ si $r = 0$.

Pour interpréter $-s\big(h, \partial^2 h\big)$ comme l'aire d'une surface dérivée, identifions pour tout $u \in \mathbb{S}^2$, la droite normale à $\mathcal{H}_h$ en $x_h(u)$, soit $N_h(u) := \{\nabla h(u)\} + \mathbb{R}u$, à la droite $L_h(u) := \{(\nabla h(u)\,; h(u))\} + \mathbb{R}\,(u; -1)$ de $\mathbb{R}^{3,1}$, en associant à $x_h(u)$ (resp. à tout $x \in N_h(u) - \{x_h(u)\}$), la sphère-point $(x_h(u)\,; 0)$ (resp. la sphère de centre x passant par $x_h(u)$ et orientée par u en $x_h\,(u)$), à l'aide de la bijection $\Sigma_h(u) : N_h(u) \to L_h(u)$, $\nabla h(u) + \lambda u \longmapsto (\nabla h(u)\,; h(u)) + \lambda\,(u; -1)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Le point $c_h(u) = \frac{1}{2}\big(c_h^1 + c_h^2\big)(u) = \nabla h(u) - \frac{\Delta h(u)}{2}\,u$ de la surface moyenne $\mathcal{M}_h = c_h\big(\mathbb{S}^2\big)$ est ainsi identifié à la sphère moyenne $\big(c_h(u)\,; R_{(1,h)}(u)\big)$ orientée par u en $x_h(u)$. L'hypersurface réglée $\mathcal{L}_h$ de $\mathbb{R}^{3,1}$ dont les $L_h(u)$ sont les génératrices est l'enveloppe de la famille d'hyperplans d'équation

$$\langle (x;t)\,, u_L \rangle_{3,1} = \frac{h(u)}{\sqrt{2}}, \quad \text{où} \quad u_L = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(u; -1)\,.$$

Elle peut être paramétrée par $\Lambda_h : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3,1}$, $(u, r) \longmapsto (x_h\,(u)\,; 0) - r\,(u; -1)$. Elle jouit d'un "caractère hérisson" (de "fonction de support" $h\,(u)\,/\sqrt{2}$) dans la mesure où u_L reste $\langle ., . \rangle_{3,1}$-orthogonal à l'espace tangent à $\mathcal{L}_h$ tout le long de $L_h(u)$. Comme tous les hérissons parallèles $\mathcal{H}_{h+t}$, $(t \in \mathbb{R})$, ont la même surface moyenne et, pour tout $u \in \mathbb{S}^2$, la même normale $N_h(u)$ et des droites $L_{h+t}(u)$ (resp. des sphères moyennes $\big(c_{h+t}(u)\,; R_{(1,h+t)}(u)\big)\big)$ telles que $L_{h+t}(u) = L_h(u) + \{(0_{\mathbb{R}^3}; t)\}\big)$ (resp. $\big(c_{h+t}(u)\,; R_{(1,h+t)}(u)\big) = \big(c_h(u)\,; R_{(1,h)}(u)\big) + \{(0_{\mathbb{R}^3}; t)\}$), nous considérerons $\mathcal{L}_h$ et toutes les $\mathcal{L}_{h+t} = \mathcal{L}_h + \{(0_{\mathbb{R}^3}; t)\}$ comme une seule et même hypersurface. Comme $\{h + t\,|t \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des fonctions dont ∇h est le gradient, on définira donc la "fonction de support" de $\mathcal{L}_h$ par $\partial h := (dh)\,/\sqrt{2}$. L'identification des normales à $\mathcal{H}_h$ aux génératrices de $\mathcal{L}_h$ fait correspondre à la surface moyenne $\mathcal{M}_h$, une surface $\mathcal{H}_{\partial h} \subset \mathcal{L}_h$ (que l'on confond avec ses translatées $\mathcal{H}_{\partial(h+t)} \subset \mathcal{L}_{h+t}\big)$. Cette surface est paramétrée par $x_{\partial h} : \mathbb{S}^2 \to \mathcal{H}_{\partial h}$, $u \longmapsto \big(c_h(u)\,; R_{(1,h)}\,(u)\big) = (x_h(u)\,; 0) - R_{(1,h)}(u)(u; -1) = (\nabla h(u)\,; h(u)) + (y; s)$, où $(y; s) \in \mathbb{R}\,(u; -1)$ est déterminé par :

$$\langle (y; s)\,, v_L \rangle_{3,1} = -\frac{\Delta h(u)}{\sqrt{2}} = \delta\,(\partial h)(u)\,, \text{ où } v_L = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(u; 1)\,,$$

Le calcul de sa première forme fondamentale g donne $x_{\partial h}^* g = \frac{1}{4}\,(R_1 - R_2)^2\,g_S$, où $x_{\partial h}^* g$ est l'image réciproque de g par $x_{\partial h}$ et g_S la métrique standard sur $\mathbb{S}^2$. L'aire de $\mathcal{H}_{\partial h}$ est donc égale à $-s\big(h, \partial^2 h\big)$. Son élément d'aire $\frac{1}{4}\,(R_1 - R_2)(u)^2\,d\sigma(u)$ n'est autre que la projection orthogonale sur le plan médiateur du segment focal $\sigma_h(u)$ de l'élément d'aire correspondant de la surface moyenne. Comme la composée de l'application tangente $T_u x_{\partial h} : T_u\mathbb{S}^2 \to T_{x_{\partial h}(u)}\mathcal{L}_h$ avec la projection de $T_{x_{\partial h}(u)}\mathcal{L}_h = \big(T_u\mathbb{S}^2 \times \{0\}\big) \oplus \mathbb{R}\,(u; -1)$ sur $T_u\mathbb{S}^2 \times \{0\} \approx T_u\mathbb{S}^2$ inverse l'orientation, nous définirons l'aire algébrique de $\mathcal{H}_{\partial h}$ par : $s(\partial h) := s\left(h, \partial^2 h\right)$. Notons que les surfaces dérivées $\mathcal{H}_{\partial h}$ forment un espace vectoriel sur lequel $\partial h \longmapsto \sqrt{-s(\partial h)}$ est une norme associée à un produit scalaire s'interprétant comme une aire mixte.

3. Des inégalités de type Brunn-Minkowski pour les surfaces focales.

Soit $\mathcal{H}_h$ un hérisson de $\mathbb{R}^3$ de fonction de support $h \in C^4\left(\mathbb{S}^2; \mathbb{R}\right)$. Sa focale $\mathcal{F}_h$ est définie comme le lieu de ses centres de courbure principaux (ou, ce qui est équivalent, comme l'enveloppe de ses normales). Définissons le volume de $\mathcal{F}_h$ par :

$$v(\nabla h) := -\int_{\mathbb{R}^3} i_{\mathcal{F}_h}(x)\, dx,$$

où $i_{\mathcal{F}_h}(x) := 1 - \frac{1}{2}\nu_h(x)$, en désignant par $\nu_h(x)$ le nombre de normales orientées à $\mathcal{H}_h$ passant par x. Notons que $\mathcal{F}_h$, et donc son volume, ne dépendent que de ∇h.

`Théorème 2.` *Soit $\mathcal{H}_h$ un hérisson de $\mathbb{R}^3$ de fonction de support $h \in C^4\left(\mathbb{S}^2; \mathbb{R}\right)$. Le volume de la focale $\mathcal{F}_h$ de $\mathcal{H}_h$ est donné par :*

$$v(\nabla h) = \frac{1}{6}\int_{\mathbb{S}^2} |R_1 - R_2|^3\, d\sigma = \frac{4}{3}\int_{\mathbb{S}^2} \left(R_{(1,h)}^2 - R_h\right)^{\frac{3}{2}} d\sigma,$$

où R_1 et R_2 désignent les rayons de courbures principaux de $\mathcal{H}_h$.

`Preuve.` On exprime $v(\nabla h)$ comme une intégrale sur $\mathbb{S}^2 \times [0,1]$ en notant que $-i_{\mathcal{F}_h}(x) = Card\left[\gamma_h^{-1}(\{x\})\right]$, où $\gamma_h : \mathbb{S}^2 \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $(u,t) \longmapsto tc_h^1(u) + (1-t)\, c_h^2(u)$, $c_h^1(u)$, $c_h^2(u)$ désignant les centres de courbure principaux de $\mathcal{H}_h$ en $x_h(u)$. □

`Corollaire 1.` *Soit $\mathcal{H}$ l'espace vectoriel réel des familles de hérissons parallèles de classe C^4 de $\mathbb{R}^3$. L'application $v : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$, $\nabla h \longmapsto v(\nabla h)^{\frac{1}{3}}$ est une norme.*

En majorant $|s(\partial h)|$ à l'aide de l'inégalité de Hölder avec $(p,q) = (3/2, 3)$, il vient :

`Corollaire 2.` *Soit $\mathcal{H}_h$ un hérisson de $\mathbb{R}^3$ de fonction de support $h \in C^4\left(\mathbb{S}^2; \mathbb{R}\right)$. L'aire de la surface dérivée $\mathcal{H}_{\partial h}$ et le volume de la focale $\mathcal{F}_h$ vérifient*

$$4\,|s(\partial h)|^3 \leq 9\pi v(\nabla h)^2.$$

References

[1] R. Langevin, G. Levitt et H. Rosenberg, Hérissons et multihérissons, (enveloppes paramétrées par leur application de Gauss), in: Singularities, Warsaw, 1985, in: Banach Center Publ. 20, PWN, Warsaw, 1988, 245-253.
[2] T. Li, Laguerre geometry of surfaces in $\mathbb{R}^3$. Acta Math. Sin., Engl. Ser. 21 (2005), 1525-1534.
[3] Y. Martinez-Maure, De nouvelles inégalités géométriques pour les hérissons. Arch. Math. 72 (1999), 444-45.
[4] Y. Martinez-Maure, New notion of index for hedgehogs of $\mathbb{R}^3$ and applications. Eur. J. Comb., 31 (2010), 1037-1049.
[5] R. Schneider, Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. 44. Cambridge: Cambridge University Press. 1993.
[6] C. Wang, Weierstrass representations of Laguerre minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$. Result. Math. 52 (2008), 399-408.

Y. Martinez-Maure, 1, rue Auguste Perret, F-92500 Rueil-Malmaison,
E-mail address: martinez@math.jussieu.fr